Si K est un corps commutatif, on considère l'anneau $A = K[X,Y]$ et l'idéal $\mathfrak{a} = (X) + (Y)$.
Mq dans le produit tensoriel $\mathfrak{a} \underset{A}{\otimes} \mathfrak{a}$, l'élément $X \otimes Y - Y \otimes X$ est $\neq 0$ et que l'on a $XY(X \otimes Y - Y \otimes X) = 0$
(On pourra considérer les applications A-bilinéaires de $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ dans $A/\mathfrak{a}$)

- $\mathfrak{a}$ est l'idéal engendré par X et Y dans $K[X,Y] \doteqdot A$, soit :

$$\mathfrak{a} = (X) + (Y) = \{ PX + QY \ / \ P, Q \in A \}$$

$\mathfrak{a}$ est donc un A-module et $\mathfrak{a} \otimes_A \mathfrak{a}$ sera un A-module de type fini engendré par $\{X \otimes X, Y \otimes Y, X \otimes Y, Y \otimes X\}$, ie :

$$\forall x \in \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} \quad \exists P, Q, R, S \in A \qquad x = P(X \otimes X) + Q(Y \otimes Y) + R(X \otimes Y) + S(Y \otimes X)$$

<u>Définissons l'application bilinéaire</u> :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} & \longrightarrow & A/\mathfrak{a} \\ (P, Q) & \longmapsto & 2.UV' + U'V \end{array} \quad \text{si} \begin{cases} P = UX + VY \\ Q = U'X + V'Y \end{cases}$$

f <u>est bien définie</u>, car si $P = UX + VY = U_1X + V_1Y$ et $Q = U'X + V'Y = U'_1X + V'_1Y$, alors $\begin{cases} U - U_1 = LY \\ V_1 - V = LX \end{cases}$ et $\begin{cases} U' - U'_1 = L'Y \\ V'_1 - V' = L'X \end{cases}$ (avec $L, L' \in A$). On en déduit :

$$2.UV' + U'V \equiv 2.U_1V'_1 + U'_1V_1 \mod \mathfrak{a}.$$

On constate que $f(X,Y) = 2$ et $f(Y,X) = 1$. D'après la prop. universelle du produit tensoriel, f passe au quotient :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a} \times \mathfrak{a} & \xrightarrow{f} & A/\mathfrak{a} \\ \downarrow & \nearrow_{\bar{f}} & \\ \mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a} & & \end{array}$$

et $\bar{f}$ est A-linéaire.

(réf. Queré ex 48 p173)

Supposons par l'absurde $X \otimes Y = Y \otimes X$, cela entraînerait

$\bar{f}(X \otimes Y) = \bar{f}(Y \otimes X) \Leftrightarrow f(X,Y) = f(Y,X) \Leftrightarrow 2 = 1$ ~~absurde~~ $\Leftrightarrow 1 = 0$ absurde.

~~(puisque K n'est pas de caractéristique 2)~~

~~C'est absurde si la caractéristique de K est ≠ 2. Si la caractéristique de K est 2, on recommence en prenant cette fois-ci f(X, Y) =~~

<u>NB</u> : 1) Pourquoi ne pas prendre $f : \mathcal{B} \times \mathcal{A} \longrightarrow A$ tout simplement ? Ça marche aussi

2) On n'a pas pu faire le calcul suivant :

$$X \otimes Y - Y \otimes X = XY(1 \otimes 1) - YX(1 \otimes 1) = 0$$

car $XY(1 \otimes 1)$ n'a pas de sens dans $\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}$, puisque $1 \notin \mathcal{B}$.

- On a bien :

$$XY(X \otimes Y - Y \otimes X) = (YX \otimes XY) - (XY \otimes YX) = 0$$